

Title	Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ, 4
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 63 p.28-p.33
Issue Date	1935-10-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74164
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

242. Picard-Vessiot, 理論=就テ. 4

吉田耕作 (阪大)

Domain of rationality R , element γ 係数
トスル

$$(1) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x) y = 0$$

ノ Galois 群ヲ $\|A\|$ トスル。

定理1. $R(y)$ ノ幾ツカ, element $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$
----- α_k カ R ノ element γ 係数トスル 線形微分方
程式

$$L(y)=0$$

、Fundamental solutions トスル。 ($R(y)$, 定義ハ前論参照)。

然ラバ $\|A\| \cdot \alpha_i; i=1, 2, \dots, k; \in L(y)=0$
ヲ満足スルカラ $\|A\|$ ハ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, 間ノ \sim ヲ, linear
substitution group G ヲ induzieren スル。 G
ハ $\|A\| = \text{stetig homomorph}$ ダカラ connected
且ツ明 = algebraic デアル。 k 次ノ non singular
matrix , 作ル群 $M_k =$ 於ケル G , fermeture (G ,
limiting point デ $M_k =$ 属スルモノヲ $G =$ ツケ加ヘ
テ得ラレルモノ) \bar{G} ハ R , 上ノ $L(y)=0$, Galois 群デア
アル。

証明。 $L(y)=0$, Galois 群ヲ G_L トスル。 $\alpha_1,$
 $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ (及ビツノ derivatives) , R , element
 , rational function デツノ numerical
value $\in R + \epsilon$, ハ即チ $R(y)$, element デツノ
numerical value $\in R + \epsilon$, ダカラ $\|A\|$ 従ツテ G
従ツテ $\bar{G} =$ ヲリ invariant。 故ニ $\bar{G} \subseteq G_L$ 。 明ニ \bar{G}
ハ $G_L =$ 於テ開カタ connected, algebraic + 群デア
アル。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (及ビツノ derivatives) ,
 R , element , rational function デ $\bar{G} =$
ヨツテ invariant + ϵ , ハ即チ $R(y)$, element
デ $\|A\| =$ ヲリ invariant ダカラツノ numerical

value $\in R$. 故 = 前論 187 p. 9 第 7 行目ノ式 = ヨリ

$$G_n = \overline{G}$$

定理 2. (1) $m (< n)$ コノ独立解 y_1, y_2, \dots, y_m が R ノ element γ 係数トスル線形微分方程式

$$(2) \quad Q(y) = 0$$

γ 満足スルトスレバ R ノ element γ 係数トスル線形微分方程式 $S(Q) = 0$ が存在シテ γ = 関スル identity

$$P(y) = S(Q(y))$$

が成立スル (Cf. F. Rädcl: Über das verallgemeinerte gemeinsame Masze von zwei Differentialpolynomen, M. Z. 40 Bd. 3 Heft, 1935) \simeq 7 symbolical =

$$(3) \quad P = S \times Q$$

ト書クコト = スル。然ラバ

$$(4) \quad \|A\| = \begin{vmatrix} B & 0 \\ X & C \end{vmatrix}$$

ノ如ク Galois 群 $\|A\|$ が分解シ夫々 m 次, $n-m$ 次 Matrix ノ群 $\|B\|, \|C\|$ ノ M_m, M_{n-m} = 於ケル permutation が $Q=0, S=0$ ノ Galois 群デアル。

証明. $Q=0, S=0$ ノ Fundamental solutions ハ夫々 $y_1, y_2, \dots, y_m; Q(y_{m+1}), Q(y_{m+2}), \dots, Q(y_n)$ デアル。 $Q=0, S=0$ ハ何レモ R ノ element γ 係数トスルカラ automorphism $\|A\|$

ヲ施シタトキ

$$\|A\| \cdot Q(y_i) = Q(\|A\| \cdot y_i) = 0; \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$\|A\| \cdot Q(y_i) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} Q(y_k) \quad (\|A\| = (a_{i,k}))$$

$$= \sum_{k=m+1}^n a_{i,k} Q(y_k);$$

$$i = m+1, m+2, \dots, n.$$

故 = $\|A\| = \begin{vmatrix} B & 0 \\ X & C \end{vmatrix}$

ノ形。故 = 定理 1 ヲ用フレバヨイ。

定理 3. 逆 = $\|A\|$ が (4) ノ如ク分解スルトキ; y_1, y_2, \dots, y_m Fundamental solutions トスル線形微分方程式

$$Q(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + g_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + g_m(x) y = 0$$

ヲ作ルト g_1, \dots, g_m ハ M_m ノ從ツテ $\|B\|$ ノ從ツテ $\|A\|$ ノ invariant *カラ $\subseteq R$. ヲツテ

$$P = S \times Q$$

ノ如キ分解が可能。定理 2 = ヲレバ $Q = 0, S = 0$, Galois 群ハ夫々 $\|B\| \cdot \|C\|$, M_m, M_{n-m} = 於ケル fermature ナリ。

定理 4. $P = 0$, Galois 群 $\|A\|$ が integrable

ナラバ Lie の定理 (筆者: 連続群論 p. 126) = ヨリ

$$\|A\| = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ x & a_{22} & 0 \\ x & x & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ヨツテ定理 3 = ヨリ

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$$

ナル如キ 因数分解? が可能ナル。コゝ = P_i ハ R ノ

element ヲ係数トスル一階ノ線形微分形式。即チ $\gamma_i \in R$ トシテ

$$(5) \quad P(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} + \gamma_1(x) \right) \left(\frac{d}{dx} + \gamma_2(x) \right) \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \left(\frac{d}{dx} + \gamma_n(x) \right) \cdot y$$

(注意) 斯ル $P(y) = 0$ ハ明 = R = 於テ integrable by quadrature。逆 = R = 於テ integrable by quadrature ナル $P(y) = 0$ ノ Galois 群ハ integrable ナカテ (Picard: Traité 3, p. 597)

定理 4'. $P = 0$ が R = 於テ integrable by quadrature ナルメノ必要條件ハ (5) ノ如キ因数分解ノ可能ナコトナル。

Vessiot ノ定理 ($P = 0$ が integrable by quadrature ナルメノ必要條件ハ $P = 0$ ノ Galois 群ノ integrable ナコトナル —— Picard. loc. cit.)

ニ於ケル充分條件ノ証明ヲ上ノ定理々ノ如クシテ求メルノが
precise 且ツワカリ易イト思ヒマス。